УДК 593.3

МЕТОД СОПРЯЖЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА НА ПЛОСКОСТИ

Э.М. Карташов, заведующий кафедрой

кафедра Высшей и прикладной математики МИТХТ им.М.В. Ломоносова,
Москва, 119571 Россия
e-mail: kartashov@mitht.ru

Развит метод сопряженных гармонических функций при решении краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа на плоскости. Рассмотрена серия иллюстративных задач.

Ключевые слова*: уравнение Лапласа, плоскость, краевые задачи, аналитические решения.*

Введение

Уравнения эллиптического типа, к которому относится уравнение Лапласа на плоскости $\Delta T(x,y)=0$, играют важную роль в приложениях. К ним приводят задачи о потенциальном движении несжимаемой жидкости; о потенциале электростатического поля; о стационарных процессах теплопроводности и диффузии; о потенциальном поле тяготения, а также задачи аэромеханики, упругости и термоупругости, электромагнетизма, дифракции и др. Краевые задачи для линейных эллиптических уравнений второго порядка имеют достаточно простую постановку, но несмотря на кажущуюся простоту соответствующих модельных представлений нахождение (точных) аналитических решений этих задач требует серьезной технической подготовки, так как связано с громоздкими вычислительными процедурами. Для областей канонического типа при решении краевых задач Дирихле и Неймана на плоскости используются такие подходы, как теория потенциала и метод интегральных уравнений; метод отражения; метод разделения переменных; метод интегральных преобразований,основанный на теории спектральных задач; метод разложения искомого решения в специальные ряды; функции единичных источников и диполей [1-3]. Метод сопряженных гармонических функций [4] (по существу – метод конформных отображений) достаточно редкий подход в аналитической теории краевых задач для уравнения Лапласа на плоскости. Указанный метод позволяет изучать установившиеся процессы в областях «нестандартного» вида, для которых классические подходы математической физики практически неприменимы. Этому подходу посвящена настоящая публикация.

Основы теории

Пусть $\xi=\xi(x,y),\eta=\eta(x,y)$ – действительные функции, f(z)=f(x+iy) – аналитическая функция в некоторой области (x,y)$\in D$ и при этом

$$\xi(x,y)+i\eta(x,y)=f(x+iy)=f(z) \qquad (1)$$

Предполагая, что ξ и η непрерывно дифференцируемы в D, находим:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}+i\frac{\partial\eta}{\partial x}=f'(z);\quad \frac{\partial\xi}{\partial y}+i\frac{\partial\eta}{\partial y}=if'(z),$$

следовательно

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\eta}{\partial y},\quad \frac{\partial\xi}{\partial y}=-\frac{\partial\eta}{\partial x}. \qquad (2)$$

Отсюда вытекает, что кривые $\xi=const$ и $\eta=const$ ортогональны.

Кроме того, так как

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y},$$

то

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}=0 \qquad (3)$$

и аналогично

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}=0, \qquad (4)$$

то есть действительная и мнимая части функции f(z) в (1), регулярной в области D, являются в этой области гармоническими функциями. А так как эти функции связаны условиями Коши-Римана (2), то они являются сопряженными.

Пусть $T(x,y)\equiv W(\xi,\eta)$ и $W(\xi,\eta)$ является такой функцией ξ и η, что

$$\frac{\partial^2 W}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial\eta^2}=0. \qquad (5)$$

Покажем, что выполняется также и равенство $\Delta T(x,y)=0$, где Δ – оператор Лапласа второго порядка. Находим:

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\partial W}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x};$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 W}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 W}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 W}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+ \qquad (6)$$

$$+\frac{\partial W}{\partial\xi}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial W}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2};$$

Аналогично:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial W}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial W}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}. \quad (7)$$

Отсюда и из (2)–(4) находим:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \ (x,y) \in D. \quad (8)$$

Соотношения (5)–(8) раскрывают суть метода сопряженных гармонических функций: если возможно получить аналитическое решение гармонической функции $W(\xi,\eta)$, удовлетворяющей уравнению (5) в области $\xi \in (\xi_1,\xi_2), \eta \in (\eta_1,\eta_2)$ по заданным значениям функции или ее производной на границе области (задачи Дирихле или Неймана), то это решение на плоскости (ξ,η) можно преобразовать в решение на плоскости (x,y) для уравнения $\Delta T(x,y) = 0$ в D. Иными словами, область D в плоскости (x,y) преобразованиями (1) перейдет в область D^* на плоскости (ξ,η) при сохранении граничных условий в исходной задаче относительно функции T(x,y) в D.

Задача Дирихле для сектора круга $0 \le r \le R, 0 \le \varphi \le \alpha.$.

Искомая задача имеет вид:

$$\frac{\partial^2 T(r,\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T(r,\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T(r,\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 \le r < R, 0 < \varphi < \alpha; \quad (9)$$

$$T(r,\varphi)\big|_{r=R} = \Psi(\varphi), \ 0 < \varphi < \alpha \quad (10)$$

$$T(r,\varphi)\big|_{\varphi=0;\varphi=\alpha} = 0, \ 0 \le r < R, \quad (11)$$

$$\left|T(r,\varphi)\right| < \infty, \ r \ge 0, 0 \le \varphi \le \alpha. \quad (12)$$

Рассмотрим преобразование

$$\xi + i\eta = -\frac{i\pi}{\alpha}\ln\frac{x+iy}{R} \quad (13)$$

Обозначая $z = r\exp(i\varphi)$, получим:

$$\xi = (\pi/\alpha)\varphi; \ \ \eta = (\pi/\alpha)\ln(R/r) \quad (14)$$

и сектор $0 \le r \le R, 0 \le \varphi \le \alpha$ на плоскости (x,y) перейдет в область $0 \le \xi \le \pi, \eta \ge 0$ на плоскости (ξ,η). Исходная задача (9)–(12) теперь будет иметь следующий вид относительно функции $W(\xi,\eta) \equiv T(r.\varphi)$:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = 0, \quad 0 < \xi < \pi, \eta > 0,$$

$$W(\xi,\eta)\big|_{\eta=0} = \Psi(\alpha\xi/\pi), \quad 0 < \xi < \pi,$$

$$W(\xi,\eta)\big|_{\xi=0;\xi=\pi} = 0, \quad \eta > 0,$$

$$\left|W(\xi,\eta)\right| < \infty, \quad \eta \ge 0, 0 \le \xi \le \pi.$$

По таблицам Карташова [2, 3] находим:

$$W(\xi,\eta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Psi(\alpha\xi'/\pi)\left[\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-n\eta)\sin n\xi \sin n\xi'\right]d\xi', \quad (15)$$

откуда несложно перейти к решению для исходной задачи. Рассмотрим в (10) случай, когда $\Psi(\varphi) = 1$; преобразуем (15) для этого случая:

$$W(\xi,\eta) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{n}\exp(-n\eta)\sin n\xi = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\exp\left[-(2n+1)\eta\right]\sin(2n+1)\xi =$$

$$= \frac{2}{\pi}I_m\left\{\ln\frac{1+\exp\left[i(\xi+i\eta)\right]}{1-\exp\left[i(\xi+i\eta)\right]}\right\} = \frac{2}{\pi}I_m\left\{\ln\frac{1-\exp(-2\eta)+i2\exp(-\eta)\sin\xi}{1-2\exp(-\eta)\cos\xi+\exp(-2\eta)}\right\} = \frac{2}{\pi}arctg\frac{\sin\xi}{sh\eta}.$$

Искомое решение теперь можно записать в виде:

$$T(r,\varphi) = \frac{2}{\pi}arctg\frac{\sin\pi\varphi/\alpha}{sh\left[(\pi/\alpha)\ln(R/r)\right]}.$$

Задача Дирихле для сектора $0 \le \varphi \le \alpha, r \ge 0$ описывается уравнением (9) с граничными условиями:

$$T(r,\varphi)\big|_{\varphi=0;\varphi=\alpha} = \Psi(r), \quad r \ge 0, \quad (16)$$

$$\left|T(r,\varphi)\right| < \infty, \quad r \ge 0, 0 \le \varphi \le \alpha. \quad (17)$$

Для решения задачи используем преобразование (13) и соотношение (14). Теперь на плоскости (ξ,η) переходим к задаче:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = 0, \ 0 < \xi < \pi, |\eta| < \infty,$$

$$W(\xi,\eta)\big|_{\xi=0;\xi=\pi} = \Psi\left\{\operatorname{Re}xp\left[-(\alpha/\pi)\eta\right]\right\}, |\eta| < \infty,$$

$\left|W(\xi,\eta)\right| < \infty, 0<\xi<\pi, \left|\eta\right|<\infty,$ с решением

$$W(\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\sin\xi\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi\left\{R\exp\left[-(\alpha/\pi)\eta'\right]\right\}\left[\frac{1}{ch(\eta-\eta')+\cos\xi}+\frac{1}{\cos(\eta-\eta')-\cos\xi}\right]d\eta'.$$

Рассмотрим важный для практики случай, когда в (15) $\Psi(r)=1.$ Тогда:

$$W(\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\sin\xi\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{ch(\eta-\eta')+\cos\xi}+\frac{1}{ch(\eta-\eta')-\cos\xi}\right]d\eta'=$$
$$=\frac{2}{\pi}\left[arctg(tg\xi/2)+arcctg(tg\xi/2)\right]=1.$$

Таким образом, $T(r,\varphi)\equiv 1$ для единичной граничной функции на лучах сектора.

Задача Дирихле для круга $0\le r\le R, 0\le\varphi<2\pi$ описывается уравнением (9) для указанной области с граничными условиями

$$T(r,\varphi)\big|_{r=R}=\Psi(\varphi),\qquad 0\le\varphi\le 2\pi, \tag{18}$$
$$\left|T(r,\varphi)\right|<\infty,\qquad r\ge 0, 0\le\varphi<2\pi. \tag{19}$$

Решение этой задачи классическими методами связано с длительной вычислительной процедурой. Рассмотрим подход, отличный от известных в математической физике. Подход использует разработанные автором этой статьи новые соотношения в методе функций Грина при решении уравнений эллиптического типа на плоскости [5]. Интегральная запись решения через функцию Грина $G(r,\varphi,r',\varphi')$ имеет вид

$$T(r,\varphi)=-\int_0^{2\pi}\Psi(\varphi')\left[R\frac{\partial G(r,\varphi,r',\varphi')}{\partial r'}\right]_{r'=R}d\varphi', \tag{20}$$

где $G(r,\varphi,r',\varphi')$ есть решение задачи

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 G}{\partial\varphi^2}=-\frac{1}{r}\delta(r-r')\delta(\varphi-\varphi'),\qquad 0\le r<R, 0\le\varphi<2\pi,$$

$$G(r,\varphi,r',\varphi')\big|_{r=R}=0,\quad (\varphi,\varphi')\in\left[0,2\pi\right),$$
$$\left|G(r,\varphi,r',\varphi')\right|<\infty, r\ge 0, 0\le\varphi\le 2\pi.$$

В [5] показано, что в (20)

$$\frac{\partial G(r,\varphi,r',\varphi')}{\partial r'}\Big|_{r'=R}=G^*(r,\varphi,\varphi'), \tag{21}$$

где $G^*(r,\varphi,\varphi')$ находится из условий

$$\frac{\partial^2 G^*}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial G^*}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 G^*}{\partial\varphi^2}=0,\quad 0\le r<R, 0\le\varphi<2\pi, \tag{22}$$

$$G^*(r,\varphi,r',\varphi')\big|_{r=R}=0,\quad (\varphi,\varphi')\in\left[0,2\pi\right), \tag{23}$$

$$\left|G^*(r,\varphi,r',\varphi')\right|<\infty, r\ge 0, 0\le\varphi\le 2\pi.\quad 0\le r\le R, 0\le\varphi\le 2\pi. \tag{24}$$

Здесь $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака.

Для нахождения $G^*(r,\varphi,\varphi')$ введем преобразование

$$\xi+i\eta=-i\ln\left[(x+iy/R\right]. \tag{25}$$

Так как $x+iy=r\exp(i\varphi),$ то

$$\xi=\varphi, \mu=\ln(R/r) \tag{26}$$

и область $r\in\left[0,R\right], \varphi\in\left[0,2\pi\right)$ переходит в область $\xi\in\left[0,2\pi\right), \eta>0.$ Теперь для функции $W(\xi,\eta,\xi')\equiv G^*(r,\varphi,\varphi')$ имеем:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial\eta^2}=0,\quad 0\le\xi<2\pi, \eta>0,$$
$$W(\xi,\eta,\xi')\Big|_{\eta=0}=\frac{1}{R}\delta(\xi-\xi'),\ (\xi,\xi')\in\left[0,2\pi\right),$$
$$W(\xi,\eta,\xi')=W(\xi+2\pi,\eta,\xi'), \eta>0, 0\le\xi<2\pi.$$
$$\left|W(\xi,\eta,\xi')\right|=\infty, \eta\ge 0, 0\le\xi<2\pi.$$

По таблицам Карташова [2, 3] находим:

$$W(\xi,\eta,\xi')=\frac{1}{2\pi R}\frac{1-\exp(-2\eta)}{\left[1-2\exp(-\eta)\cos(\xi-\xi')+\exp(-2\eta)\right]}.$$

Возвращаясь к старым переменным, запишем для $G^*(r,\varphi,\varphi')$:

$$G^*(r,\varphi,\varphi')=\frac{1}{2\pi R}\frac{R^2-r^2}{\left[R^2+r^2-2rR\cos(\varphi-\varphi')\right]}. \tag{27}$$

Теперь согласно (20), (21), (27) задача Дирихле для круга будет иметь следующее решение (которое носит название – интеграл Пуассона)

$$T(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Psi(\varphi')\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2rR\cos(\varphi-\varphi')}.\,d\varphi'. \tag{28}$$

Область, ограниченная двумя софокусными эллипсами. Классические подходы не дают возможность получить аналитическое решение задачи Дирихле (или Неймана) для указанной области. Метод сопряжения гармонических функций и здесь оказывается эффективным подходом. Рассмотрим преобразование

$$\xi + i\eta = arcch\frac{x+iy}{c}, \qquad (29)$$

где $(\pm c)$ – координаты фокусов, связанные с большой (2 a) и малой (2 b) осями эллипса соотношением $c^2 = a^2 - b^2$. Находим из (29): $x = cch\xi\cos\eta, y = csh\xi\sin\eta$.

Тогда:
$\frac{x^2}{c^2ch^2\xi} + \frac{y^2}{c^2sh^2\xi} = 1.$

Следовательно, кривые $\xi = const$ образуют ряд софокусных эллипсов, и указанная область на плоскости (x, y) перейдет на плоскости (ξ, η) в область $\xi_1 \le \xi \le \xi_2, -\pi < \eta < \pi$. Для этой области рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = 0, \ \xi_1 < \xi < \xi_2, -\pi < \eta < \pi, \qquad (30)$$

$$W(\xi,\eta)\Big|_{\xi=\xi_i} = f_i(\eta), i = 1,2, -\pi < \eta < \pi \qquad (31)$$

Разложим функции $f_i(\eta)$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$:

$$f_1(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos n\eta + b_n\sin n\eta, \qquad (32) \qquad f_2(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{'}\cos n\eta + b_n^{'}\sin n\eta, \qquad (33)$$

где
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(\eta')d\eta', \qquad a_0^{'} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_2(\eta^{'})d\eta^{'};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(\eta')\cos n\eta^{'}d\eta'; \qquad a_n^{'} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_2(\eta^{'})\cos n\eta' d\eta';$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(\eta')\sin n\eta' d\eta', \qquad b_n^{'} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_2(\eta')\sin n\eta' d\eta'.$$

Теперь в соответствии с (31)-(32) искомое решение ищем в виде:

$$W(\xi,\eta) = \sum_{n=0}^{\infty}\Psi_n(\xi)(a_n\cos n\eta + b_n\sin n\eta) + \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(\xi)(a_n'\cos n\eta + b_n'\sin n\eta) \qquad (34)$$

Подставляя (34) в (30) получаем:

$$\frac{d^2\Psi_n}{d\xi^2} - n^2\Psi_n = 0 \qquad \frac{d^2\varphi_n}{d\xi^2} - n^2\varphi_n = 0$$

$$\Psi_n(\xi_1) = 1, \Psi_n(\xi_2) = 0 \qquad \varphi_n(\xi_1) = 0, \varphi_n(\xi_2) = 1$$

Отсюда:

$$\Psi_n(\xi) = \frac{shn(\xi_2 - \xi)}{shn(\xi_2 - \xi_1)}, \quad \varphi_n(\xi) = \frac{shn(\xi - \xi_1)}{shn(\xi_2 - \xi_1)}.$$

Таким образом, искомое решение теперь можно записать в виде:

$$W(\xi,\eta) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{shn(\xi_2 - \xi)}{shn(\xi_2 - \xi_1)}(a_n\cos n\eta + b_n\sin n\eta) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{shn(\xi - \xi_1)}{shn(\xi_2 - \xi_1)}(a'_n\cos n\eta + b'_n\sin n\eta).$$

Рассмотренный метод позволяет получить точные аналитические решения и в таких случаях, как задача Неймана для круга или его частей; область между двумя концентрическими окружностями или между двумя софокусными гиперболами; область между двумя пересекающимися или непересекающимися окружностями; область между двумя полуэллипсами и отрезком большой оси; полный эллипс или полуэллипс; четырехугольник, ограниченный дугами двух софокусных эллипсов и гипербол. Указанные случаи представляют собой малоизученные области в теории стационарных процессов и ждут заинтересованных читателей.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
2. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: Книжный дом «Либроком», 2012. 656 с.
3. Карташов Э.М. Аналитическая теория теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 540 с.
4. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.
5. Карташов Э.М. О новом подходе при решении краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа // Изв. РАН. Энергетика. 2010. № 1. С. 119–127.

THE CONJUGATE HARMONIC FUNCTIONS IN PROBLEMS FOR THE LAPLACE EQUATION

E.M. Kartashov@

M.V. Lomonosov Moscow State University of Fine Chemical Technologies, Moscow, 119571 Russia

@ *Corresponding author e-mail: kartashov@mitht.ru*

A method of conjugate harmonic functions in solving boundary value problems for Laplace's equation in two dimensions was developed. A series of illustrative problems was considered.

Keywords: *Laplace's equation, plane, boundary value problems, analytical solutions.*